Universität Bayreuth — Mathematikwettbewerb
10. Tag der Mathematik — 11. Juli 2015

Klassenstufe 11-12 / Lösungsvorschläge

Bitte jeweils in Teams von 3-5 Schülern bearbeiten.
Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

4 Pkte 1) Bankraub[1]

Die kleine Daisy wohnt auf Money Island, einer kleinen Insel irgendwo, weit abgeschieden in den Weiten der sieben Weltmeere. Fremde kamen hier zuletzt vor 200 Jahren an. Die Inselbewohner leben also durchweg unter sich. Verkehrstechnisch ist Money Island gut erschlossen, allerdings nicht mit Straßen wie hierzulande, sondern mit Kanälen, auf welchen die Einwohner mit Booten unterwegs sind. Aufgrund der begrenzten Rohstoffe auf Money Island, gibt es die wasserfeste und vor Rost schützende Bootslackierung nur in den Farben dunkelrot und grau. Graue Farbe ist billiger und so haben nur 500 der Bootsbesitzer ein rotes Gefährt, die übrigen 1500 besitzen ein graues.

Eines Tages passiert es: Die kleine Daisy wird Zeuge eines Banküberfalls. Kurz vor Schalterschluss, es dämmerte bereits, wurde der Kassier dazu genötigt, große Mengen des Geldbestandes herauszugeben. Bei der Vernehmung durch die Polizei gibt die kleine Daisy an, sie hätte unter Schock gestanden und wüsste nicht mehr allzu viel. Sie könne sich aber daran erinnern, dass der Täter auf einem roten Boot geflohen sei. Dem Inselpolizisten leuchtet sofort ein, dass er nun alle Halter roter Boote überprüfen muss. „Wer sagt uns eigentlich, dass die kleine Daisy rot und grau in der Dämmerung nicht einfach verwechselt hat?“, wirft der Staatsanwalt ein. Die beiden beraten sich kurz und entscheiden dann, dass Daisys Trefferquote beim Erkennen von rot und grau in der Dämmerung ermittelt werden müsse. Zu diesem Zweck wird am folgenden Abend vor der ausgeraubten Bank zur allgemeinen Erheiterung der anwesenden Zaungäste eine Show mit schnell vorbeifahrenden roten und grauen Booten veranstaltet. Die kleine Daisy muss jeweils angeben, ob das Boot rot oder grau war.

Ergebnis: Wenn das Boot tatsächlich rot ist, dann erkennt dies Daisy in 80 % der Fälle richtig; in 20 % der Fälle sagt sie fälschlicherweise, das Boot wäre grau. Wenn das Boot tatsächlich grau ist, dann erkennt Daisy dies in 60 % der Fälle richtig; in 40 % der Fälle liegt sie falsch.

Der Inselpolizist und der Staatsanwalt fragen sich nun, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Täter mit einem roten Boot flüchtete.

(a) Berechne die gesuchte Wahrscheinlichkeit! Die Boote welcher Farbe stehen also unter Verdacht?

(b) Die Halter von Booten welcher Farbe sollte der Inselpolizist zuerst überprüfen? Oder anders gefragt: Bei den Booten welcher Farbe hat der Inselpolizist die höhere Trefferwahrscheinlichkeit pro Boot bei seiner Überprüfung?

---

[1] Quellen (in der Reihenfolge ihrer Relevanz):

– Walter Olbricht, Aufgabensammlung zu *Statistische Methoden I*

– Hans-Peter Beck-Bordholdt, Hans-Hermann Dubben, 2007: *Der Schein der Weisen*, 5. Auflage, Rowohlt

– Daniel Kahnemann, Amos Tversky, 1972: *On prediction and judgement*, ORI Research Monograph 12 (4), S. 10

Lösungsvorschlag:

Zu (a): Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Boot rot ist, gegeben dass die kleine Daisy sich an ein rotes Boot erinnert. Es gilt:

$$\text{Wk(Boot rot} \mid \text{Erinnerung rot)} = \frac{\text{Wk(Boot rot und Erinnerung rot)}}{\text{Wk(Erinnerung rot)}} =$$

$$= \frac{\text{Wk(Boot rot und Erinnerung rot)}}{\text{Wk(Erinnerung rot} \mid \text{Boot rot)}\cdot\text{Wk(Boot rot)}+\text{Wk(Erinnerung rot} \mid \text{Boot grau)}\cdot\text{Wk(Boot grau)}}$$

$$= \frac{1/4\cdot 4/5}{1/4\cdot 4/5+3/4\cdot 2/5} = \frac{1/5}{1/5+6/20} = \frac{1/5}{4/20+6/20} = \frac{1/5}{1/2} = 2/5 = 40\,\%$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also 40 %.

(Anmerkung: Zwar ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ein rotes Boot war, durch die Aussage der Zeugin von 25 % auf 40 % gestiegen. Die Wahrscheinlichkeit dafr, dass es ein graues Boot war, beträgt aber immer noch 60 %, also mehr als die Hälfte. Trotz der Aussage der Zeugin ist es wahrscheinlicher, dass es ein graues Boot war.)

Zu (b): Mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 % war es also ein rotes Boot. Diese 40 % verteilen sich auf 500 Boote, pro Boot also

$$\frac{40\,\%}{500} = \frac{1}{100}\cdot\frac{40}{5}\,\% = \frac{8}{100}\,\%.$$

Jedes untersuchte rote Boot hat also eine Wahrscheinlichkeit von 0.008 % das Fluchboot zu sein.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % war es ein graues Boot. Diese 60 % verteilen sich auf 1500 Boote, pro Boot also

$$\frac{60\,\%}{1500} = \frac{1}{25}\,\% = \frac{4}{100}\,\%.$$

Jedes untersuchte graue Boot hat also eine Wahrscheinlichkeit von 0.004 % das Fluchtboot zu sein.

Man sollte zuerst die roten Boote untersuchen.

1 Pkt

2) Funktion

Es sei f eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion mit positiven Funktionswerten, die die zwei Eigenschaften

(I) $f(1) = 4$ und

(II) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

erfüllt. Welchen Zahlenwert hat die Funktion f an der Stelle $\frac{1}{2}$?

Lösungsvorschlag:

$$4 \overset{(I)}{=} f(1) = f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \overset{(II)}{=} f(\frac{1}{2}) \cdot f(\frac{1}{2}) = \left[f(\frac{1}{2})\right]^2$$

Also $f(\frac{1}{2}) = \pm 2$.

Da $f(x) > 0$, *ist das Endergebnis:* $\boxed{f(\frac{1}{2}) = 2}$.

3) Fee

Vor einigen hundert Jahren soll sich im geheimnisumwitterten Druidenhain bei Muggendorf in der Fränkischen Schweiz folgendes ereignet haben:

Eine Fee erscheint im Nebel bei Abenddämmerung einem Händler und erklärt ihm, dass er ein Geschenk erhalte. Er dürfe sich für eine der beiden Alternativen entscheiden:

a) Entweder erhält er 1 000 Gulden (viel Geld zur damaligen Zeit) oder

b) Er nennt eine natürliche Zahl n und erhält dann

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \text{ Gulden.}$$

Soweit überliefert ist, hat sich der Händler verwirrt für die sichere Alternative a) entschieden, hatte aber später große Zweifel, ob er sich richtig entschieden hatte.

Kürzlich ist seine Ururenkelin auf einen Rest einer Aufzeichnung ihres Vorfahrens gestoßen, der möglicherweise mit dem Geschenk der Fee zu tun hat:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99}\right) + \ldots \\ \leq \quad & (1 + 1 + \ldots + 1 + 1) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}) + (\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}) + \ldots \\ \geq \quad & 1 + (\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}) + (\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{1}{100} + \frac{1}{100}) + \ldots \end{aligned}$$

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Der Rest der Überlegungen ist leider von Mäusen aufgefressen...

4 Pkte

Frage I: War die Entscheidung mit Alternative a) gut? Oder ist die Alternative b) mit einer *geeigneten* Zahl n besser? Falls die Alternative b) besser sein sollte, mit welcher Zahl n bekommt man mit b) sicher 2 000 Gulden?

Seine Ururenkelin, ihres Zeichens Mathe-Genie, auf Urlaub in der Fränkischen Schweiz, hat sich natürlich genau überlegt, was sie der Fee antworten würde, falls auch sie die Fee treffen würde. Und wie es der Zufall will, auch sie trifft die Fee, allerding im dunklen Wald bei Goldkronach am Rand des Fichtelgebirges.

Allerdings ist das Angebot ein wenig angepasst:

Die Fee erklärt der Ururenkelin, dass auch sie ein Geschenk erhalte. Sie dürfe sich für eine der beiden Alternativen entscheiden:

α) Sie erhält 1 Kilogramm Gold oder

β) Sie nennt eine natürliche Zahl n und erhält dann $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(n)$ Gramm Gold.

Für die neue Fee-Funktion gilt:

$$f(k) = \begin{cases} 1/k & \text{falls die Zahl } k \text{ keine Nullen} \\ & \text{in der üblichen Zifferndarstellung enthält,} \\ 0 & \text{falls die Zahl } k \text{ mindestens eine Null} \\ & \text{in der üblichen Zifferndarstellung enthält.} \end{cases}$$

Zum Beispiel gilt für die Fee-Funktion $f(15) = 1/15$, $f(243) = 1/243$, aber $f(20) = 0$, $f(100) = 0$, $f(101) = 0$ und $f(110) = 0$ usw.

4 Pkte

Frage II:
Welche Alternative ist besser?
Wenn man sich für β) entscheidet, wie muss man dann n wählen, dass man mindestens 2 Kilogramm Gold erhält?
Ist es möglich auch 100 Kilogramm Gold zu bekommen?

Lösungsvorschlag zu Frage I:

$$\begin{aligned}
& 1+(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{10})+(\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{100})+\ldots+(\frac{1}{1+10^{r-1}}+\ldots+\frac{1}{10^r}) \\
\geq\ & 1+9\cdot\frac{1}{10}+90\cdot\frac{1}{100}+\ldots+\frac{9}{10}=1+r\cdot\frac{9}{10}
\end{aligned}$$

Mit $n=10^r$ *erhält man mit b) sicher* $1+r\cdot\frac{9}{10}$ *Gulden.*

Mit $r\to\infty$ *geht auch* $1+r\cdot\frac{9}{10}\to\infty$.

Lösung b) ist besser.

Wie soll man n (bzw. r) wählen, damit man sicher 2000 Gulden bekommt?

Antwort: $n\geq 10^{2222}$ *langt.*

Begründung: $1+r\cdot\frac{9}{10}\geq 2000 \Leftrightarrow r\geq 1999\cdot\frac{10}{9}=2221,11\ldots \Leftarrow r=2222$

Lösungsvorschlag zu Frage II:

Def: gefährliche Zahl = mindestens eine Null in der Zahldarstellung

Def: ungefährliche Zahl = keine Null in der Zahldarstellung

Zwischen 10 und 99 gibt es $9\cdot 9$ *ungefährliche Zahlen von* $9\cdot 10$ *Zahlen.*

Zwischen 100 und 999 gibt es 9^3 *ungefährliche Zahlen von* $9\cdot 10^2$ *Zahlen.*

Zwischen 1000 und 9999 gibt es 9^4 *ungefährliche Zahlen von* $9\cdot 10^3$ *Zahlen.*

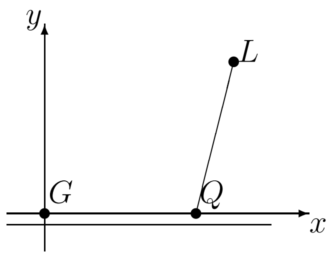
$\ldots$

$$\begin{aligned}
f(1)+\ldots+f(10^p) \quad &= \quad \overbrace{f(1)+f(2)+\ldots+f(9)}^{\leq 9}+ \\
&+ \quad f(10)+\ldots+f(99)+ \\
&+ \quad f(100)+\ldots+f(999)+ \\
&+ \quad f(1000)+\ldots+f(9999)+ \\
&+ \quad \ldots+ \\
&+ \quad f(10^{p-1})+\ldots+f(10^p-1)+\underbrace{f(10^p)}_{=0}\leq \\
&\leq \quad 9+\frac{1}{10}\cdot 9^2+\frac{1}{100}\cdot 9^3+\frac{1}{1000}\cdot 9^4+\ldots+10^{p-1}\cdot 9^p\leq \\
&\leq \quad 9\cdot\left(1+\frac{9}{10}+(\frac{9}{10})^2+(\frac{9}{10})^3+\ldots+(\frac{9}{10})^{p-1}\right)\leq \\
&\leq \quad 9\cdot\frac{1-(\frac{9}{10})^p}{1-\frac{9}{10}}\leq 9\cdot\frac{1}{1-\frac{9}{10}}=90
\end{aligned}$$

Mit der Wahl von β) *– egal wie groß man* $n=10^p$ *wählt – bekommt man höchstens 90 Gramm Gold.*

Die Variante α) *mit 1 Kilogramm Gold ist also sehr viel besser!*

6 Pkte 4) Motorradralley



Die Teilnehmer einer Motorrad-Rallye in der Fränkischen Schweiz erfahren am Kontrollpunkt Großziegenfeld $G(0,0)$, dass sie als nächstes einen Kontrollpunkt $L(5,2)$ (Ludwigs Bratwurststand) anzufahren haben. (Ludwigs Bratwurststand ist schon kilometerweit an der hohen weißen Rauchsäule und dem Duft der verbrannten Kiefernzapfen zu erkennen.) Weiter wird ihnen bekanntgegeben, dass es die örtlichen Gegebenheiten zulassen, auf der Landstraße (x-Achse) im Mittel $v_1 = 80$ [km/h], und in der unebenen Wiese mit versteckten Felsbrocken ($y > 0$) im Mittel $v_2 = 20$ [km/h] zu fahren.

An welcher Stelle $Q(x, 0)$ sollten die Motorsportler die Landstraße verlassen, um schnellstens in L zu ihren Bratwürsten zu kommen?

(Die Einheiten der Punkte sind in km gegeben.)

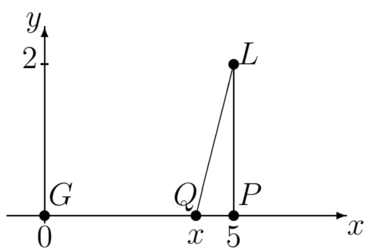
Lösungsvorschlag (sehr ausführliche Variante):

Zeit=Weg/Geschwindigkeit bzw. in Einheiten $h = \frac{km}{km/h}$.

(Zwischen Q und L sollte man möglichst geradlinig fahren, damit der Weg und damit die Fahrzeit am kürzesten ist.)

Die Gesamtzeit, die wir minimieren wollen, besteht aus der Zeit, die die Motorradfahrer mit 80 [km/h] zwischen G und Q verbrauchen, plus der Zeit, die die Motorradfahrer mit 20 [km/h] zwischen Q und L verbrauchen.

Wir ergänzen die gegebene Figur um das Lot von L auf die x-Achse. Damit erhalten wir ein rechtwinkliges Dreieck auf das wir Pythagoras anwenden können.



Zeit, um mit 80 [km/h] von G nach Q zu fahren $= \dfrac{x}{80}$.

Zeit, um mit 20 [km/h] von Q nach L zu fahren $= \dfrac{\sqrt{(5-x)^2 + 2^2}}{20}$.

Gesamtzeit $= \tilde{f}(x) = \dfrac{x}{80} + \dfrac{\sqrt{(5-x)^2+2^2}}{20} \rightarrow$ *(globales) Minimum*

Entfernen der Nenner, damit die Funktion einfacher wird:

$$f(x) = x + 4\sqrt{(5-x)^2+4} \rightarrow \textit{(globales) Minimum}$$

(Bei dieser Aufgabe darf $x \in \mathbb{R}$ eingesetzt werden. Wobei man durch gesunden Menschenverstand *als Lösung natürlich $x < 0$ und $x > 5$ ausschließen könnte. So hat man aber eine unbeschränkte Optimierungsaufgabe die* einfacher *lösbar ist.)*

Notwendige Bedingung:

$$\textit{globales Minimum} \Rightarrow \textit{lokales Minimum} \Rightarrow 0 = f'(x) = 1 + 4\frac{(-2)(5-x)}{2\sqrt{(5-x)^2+4}}$$

Multiplikation mit Nenner ergibt:

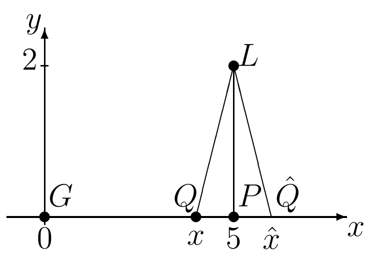
$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \sqrt{(5-x)^2+4} - 4(5-x) \\ \Rightarrow \sqrt{(5-x)^2+4} &= 4(5-x) \end{aligned}$$

Quadrieren der Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} \Rightarrow (5-x)^2+4 &= 4^2(5-x)^2 \\ \Rightarrow 15(5-x)^2 &= 4 \\ \Rightarrow (5-x)^2 &= \frac{4}{15} \\ \Rightarrow (5-x) &= \pm\frac{2}{\sqrt{15}} \\ \Rightarrow x = 5 - \frac{2}{\sqrt{15}} \textit{ oder } \hat{x} = 5 + &\frac{2}{\sqrt{15}} \end{aligned}$$

Der Weg über $Q(5-\frac{2}{\sqrt{15}},0)$ ist kürzer als der Weg über $\hat{Q}(5+\frac{2}{\sqrt{15}},0)$.

Endergebnis: Also ist $Q(5-\frac{2}{\sqrt{15}},0)$ die gesuchte Lösung.



10 Pkte 5) Jacqueline

Jacqueline, die französische Austauschschülerin, wird von den beiden Schülern Max und Moritz angebetet und verehrt. Max und Moritz sind sich gegenseitig spinnefeind. Beide fragen einzeln Jacqueline nach ihrem Geburtstag, da jeder ihr ein Geschenk mit der Post nach Frankreich schicken will, wenn Sie wieder zuhause ist.

So einfach will sie ihren Geburtstag aber nicht verraten.

A. In der großen Pause erzählt Sie laut ihren Freundinnen – in Hörweite der spinnefeinden Schülern Max und Moritz – dass Sie an einem der folgenden Tage Geburtstag hat: 25. Juli, 26. Juli, 29. Juli, 27. August, 28. August, 24. September, 26. September, 24. Oktober, 25. Oktober, 27. Oktober.

B. In der folgenden Englischstunde verrät sie Max flüsternd nur den Tag ihres Geburtstags.

C. In der darauffolgenden Physikstunde verrät Sie Moritz flüsternd nur den Monat ihres Geburtstags.

Max würde seinem Feind Moritz nie den Tag und umgekehrt Moritz seinem Feind Max nie den Monat verraten.

Bei Schulschluss hört sie jedoch folgendes Gespräch zwischen den beiden:

D. Moritz: „Ich weiß leider nicht wann Jacqueline Geburtstag hat.

E. Schade! Aber, hihi! Hihi! Aber ich weiß, dass Du es auch nicht weißt! Hihi!“

F1. Max: „Ich wusste bisher auch nicht, wann Jacqueline Geburtstag hat.

F2. Aber jetzt weiß ich das genaue Datum.“

G. Moritz entgegnet: „Jetzt weiß ich auch das genaue Datum.“

Frage: Wann hat also Jacqueline Geburtstag und erkläre wie Max und Moritz das genaue Geburtsdatum herausbekommen haben.

Lösungsvorschlag:

Man muß die zeitliche Abfolge der Informationsstände der einzelnen Personen zur Lösung berücksichtigen!

Deshalb haben wir oben in der Angabe, bereits Markierungen für einige Aussagen angebracht.

Wie ist der Wissensstand nach ...?

Nach A.:

Legende der Tabellen:
m=möglicherweise
–=sicher nicht
?=ja oder nein oder möglicherweise

	24.	25.	26.	27.	28.	29.
Juli		m	m			m
Aug				m	m	
Sept	m		m			
Okt	m	m		m		

Tabelle A: Informationsstand von Max und Moritz nach A.

Nach B.: Max weiß jetzt den Tag.

Nach C.: Moritz weiß jetzt den Monat.

Nach A. und C. für Moritz:

Insbesondere fällt aus der Tabelle A auf, dass pro Monat mindestens 2 Tage jeweils als Geburtstag in Frage kommen.

D.h. Moritz kann den Geburtstag nach C. nicht wissen.
(Was er uns auch in D. verrät.)

Nach A. und B. für Max:

Es gibt jedoch Tage in der Tabelle, für die nur ein Monat als Geburtstag in Frage kommt:
D.h. Max könnte aus der Information bei B. „Der Tag ist der 29.“ sofort schließen, dass der Geburtstag am 29. Juli ist.
Analog könnte Max aus der Information bei B. „Der Tag ist der 28.“ sofort schließen, dass der Geburtstag am 28. August ist.)

Nach E.: Moritz kann <u>nicht</u> Juli erfahren haben.
Begründung: Falls in B. Max 29. erfahren hätte, wüßte Max bereits den Geburtstag. (Es gibt nur „einen“ 29. in der Tabelle.) Widerspruch zu E. (Moritz könnte sich nicht sicher sein, dass Max das Geb.datum nicht kennt.)

Moritz kann <u>nicht</u> August erfahren haben.
Begründung: Falls in B. Max 28. erfahren hätte, wüßte Max bereits den Geburtstag. (Es gibt nur „einen“ 28. in der Tabelle.) Widerspruch zu E! (Moritz könnte sich nicht sicher sein, dass Max das Geb.datum nicht kennt.)

Nach E. wissen also sowohl Max und Moritz, dass Juli und August nicht mehr in Frage kommen.

	24.	*25.*	*26.*	*27.*	*28.*	*29.*
(Juli)		–	–			–
(Aug)				–	–	
Sept	?		?			
Okt	?	?		?		

Tabelle E: Mindestinformation an – von Max und Moritz nach E.

Nach A. und B. und F1.: Max hat <u>nicht</u> die 28. oder 29. erfahren.
Begründung: In beiden Fällen wüßte er aus der Tab. A bereits den Geburtstag. Widerspruch!

Nach F2.: Max kennt jetzt den Geburtstag aus seiner Version der Tabelle E, also kann der Tag nicht der 24. gewesen sein.
Begründung: In diesem Fall ist nach seiner Version der Tabelle E noch der 24. September oder der 24. Oktober möglich. Widerspruch!

	(24.)	*25.*	*26.*	*27.*	*(28.)*	*(29.)*
(Juli)		-	-			-
(Aug)				-	-	
Sept	-		?			
Okt	-	?		?		

Tabelle F2: Mindestinformation an – von Max und Moritz nach F2.

Nach G.: Jetzt weiß auch Moritz den Geburtstag, er weiß ja den Monat. In diesem Monat darf es also nur noch einen Tag in Tabelle F2 geben.

$\boxed{\textit{Also ist der Geburtstag am 26. September.}}$

2 Pkte 6) Fermat

Ein Spezialfall von Fermats letztem Satz ist die Aussage, dass $a^3 + b^3 = c^3$ keine Lösung mit positiven ganzen Zahlen a, b, c besitzt. In der Simpsonsfolge „Im Schatten des Genies" schreibt Homer folgende bemerkenswerte Gleichung an die Tafel:

$$3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12} \qquad (*)$$

Wie passt das zusammen?

2 Pkte *Anspruchsvolle Zusatzfrage:* Angenommen, man kennt Fermats letzten Satz nicht. Würde es helfen, einen üblichen Taschenrechner zu besitzen und ihn zu benutzen um die Korrektheit der obigen Gleichung zu überprüfen?

Ein üblicher Taschenrechner beherrscht nur Zahlen in Zehnerpotenzschreibweise mit 16 (Mantissen-)Stellen, z.B. $\pm \underbrace{1,234567890123456}_{\text{16 Stellen}} * 10^d$ wobei d eine ganze Zahl zwischen -99 und $+99$ ist.

Lösungsvorschlag:

Annahme die Gleichung (*) ist richtig. Dann können wir mit den Potenzgesetzen umformen

$$
\begin{aligned}
&3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12} \Leftrightarrow \\
&(3987^4)^3 + (4365^4)^3 = (4472^4)^3 \Leftrightarrow \\
&a^3 + b^3 = c^3
\end{aligned}
$$

mit $a = 3987^4 \in \mathbb{N}$, $b = 4365^4 \in \mathbb{N}$, $c = 4472^4 \in \mathbb{N}$.

Wir hätten also ein Gegenbeispiel zum Satz von Fermat gefunden. Widerspruch!

Also wissen wir, dass die Gleichung (*) falsch sein muss!

Zur Zusatzfrage:

Nun stellen wir uns auf den Standpunkt, wir kennen den Satz von Fermat nicht und wir wollen durch eintippen in den Taschenrechner nachprüfen ob die Gleichung (*) richtig ist.

Nun bei einer Gleichung wie z.B. $1034 + 305 = 1338$ *haben wir mit einem üblichen Taschenrechner keine Schwierigkeit.*

Anders sieht es bei den riesengroßen Zahlen in (*) aus.

Wieviele Stellen brauchen wir (mindestens) zur Darstellung von 4365^{12}*?*

Nun gilt (beachte in der Rechnung $2^{10} = 1024 > 1000$*) wegen*

$$
\begin{aligned}
4365^{12} &> 4000^{12} = 4^{12} \cdot 1000^{12} = 4^{12} \cdot (10^3)^{12} = \\
&= 2^{24} \cdot 10^{36} = 2^4 \cdot 2^{20} \cdot 10^{36} = 16 \cdot (2^{10})^2 \cdot 10^{36} > \\
&> 16 \cdot 1000^2 \cdot 10^{36} = 16 \cdot 10^6 \cdot 10^{36} = 1,6 \cdot 10^{43}\,,
\end{aligned}
$$

dass die Zahl 4365^{12} *mindestens 43 Ziffern besitzt. Außerdem ist die letzte Ziffer von* 4365^{12} *eine* 5. *(Begründung:* $5 \cdot 5 = 25$*) Damit braucht man einen Taschenrechner der mindestens 43 Mantissenstellen beherrscht.*

Mit dem üblichen Taschenrechner können Sie nur eine Näherung von 4365^{12} *intern abspeichern, wobei die ersten*[2] *12 Stellen richtig sind und alle weiteren Stellen durch Nullen ersetzt sind.*

Nachdem Sie 4365^{12} *schon nicht genau abspeichern können, können Sie die Korrektheit von (*) mit diesem üblichen Taschenrechner nicht überprüfen.*

Die Antwort ist als nein. (Ausweg mit der Hand die Rechnung fehlerfrei(!?!) durchführen. Also doch besser ein Computeralgebrasystem benutzen, dass mit entsprechender Rechenzeit auch 100 Mantissenstellen verarbeiten kann.)

[2] genauer: die ersten 11 Stellen richtig sind und die 12te Stelle gerundet ist.