Klassenstufe 9-10 / Lösungsvorschläge

Bitte jeweils in Teams von 3-5 Schülern bearbeiten.

Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

6 Pkte 1) Mähdrescher

Vor der Dreschsaison kommen die drei Mähdrescher von Bauer Huber in die Landmaschinenwerkstatt zur Reperatur.

Repariert der Auszubildende die drei Mähdrescher alleine, dann dauert das 15 Stunden länger als, wenn der Meister die drei Mähdrescher alleine repariert. Arbeiten beide zusammen, so sind sie 5 Stunden früher fertig, als wenn der Meister alleine repariert.

Wie lange braucht der Meister, um die drei Mähdrescher alleine zu reparieren?

Und wie lange braucht der Auszubildende allein?

Wie lange brauchen beide zusammen?

(Probe!)

Lösungsvorschlag:

Wir definieren folgende Variablen:

Ein Auftrag = „3 Mähdrescher reparieren“.

Der Meister braucht M Stunden um den Auftrag alleine zu erledigen.
Der Auszubildende braucht A Stunden um den Auftrag alleine zu erledigen.
Gemeinsam brauchen sie T Stunden.

Der Auszubildende benötigt 15 h länger als der Meister: $\boxed{A = M + 15}$.
Gemeinsam brauchen sie 5 h weniger als der Meister alleine: $\boxed{T = M - 5}$.

Nach T Stunden hat der Meister den Bruchteil T/M und der Auszubildende den Bruchteil T/A von einem ganzen Auftrag (=drei Mähdrescher reparieren) geschafft.
Gemeinsam ergibt das: $\boxed{T/M + T/A = 1}$.

Somit ergibt sich folgende Gleichung, die wir schließlich zu einer quadratischen Gleichung umformen:

$$\frac{M-5}{M} + \frac{M-5}{M+15} = 1$$

$$\frac{(M-5)(M+15) + M(M-5)}{M(M+15)} = \frac{2M^2 + 5M - 75}{M^2 + 15M} = 1$$

$$2M^2 + 5M - 75 = M^2 + 15M$$

$$M^2 - 10M - 75 = 0$$

$$M_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 4 \cdot 75}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{10 \pm 20}{2} = 5 \pm 10$$

$$M_1 = 15 \textit{ oder } M_2 = -5$$

Die negative Lösung ist hier sinnlos, da $M > 0$.

Die Antwort lautet also:

Der Meister braucht alleine $M = 15$ Std., der Auszubildende braucht alleine $A = 30$ Std.

Nach $T = 10$ Std. sind sie gemeinsam fertig.

Alternative: Alle Zahlen auf die Reperatur eines Mähdrescher herunterbrechen und am Schluß wieder hochrechnen.

10 Pkte 2) Jacqueline

Jacqueline, die französische Austauschschülerin, wird von den beiden Schülern Max und Moritz angebetet und verehrt. Max und Moritz sind sich gegenseitig spinnefeind. Beide fragen einzeln Jacqueline nach ihrem Geburtstag, da jeder ihr ein Geschenk mit der Post nach Frankreich schicken will, wenn Sie wieder zuhause ist.

So einfach will sie ihren Geburtstag aber nicht verraten.

A. In der großen Pause erzählt Sie laut ihren Freundinnen – in Hörweite der spinnefeinden Schülern Max und Moritz – dass Sie an einem der folgenden Tage Geburtstag hat: 25. Juli, 26. Juli, 29. Juli, 27. August, 28. August, 24. September, 26. September, 24. Oktober, 25. Oktober, 27. Oktober.

B. In der folgenden Englischstunde verrät sie Max flüsternd nur den Tag ihres Geburtstags.

C. In der darauffolgenden Physikstunde verrät Sie Moritz flüsternd nur den Monat ihres Geburtstags.

Max würde seinem Feind Moritz nie den Tag und umgekehrt Moritz seinem Feind Max nie den Monat verraten.

Bei Schulschluss hört sie jedoch folgendes Gespräch zwischen den beiden:

D. Moritz: „Ich weiß leider nicht wann Jacqueline Geburtstag hat.

E. Schade! Aber, hihi! Hihi! Aber ich weiß, dass Du es auch nicht weißt! Hihi!“

F1. Max: „Ich wusste bisher auch nicht, wann Jacqueline Geburtstag hat.

F2. Aber jetzt weiß ich das genaue Datum.“

G. Moritz entgegnet: „Jetzt weiß ich auch das genaue Datum.“

Frage: Wann hat also Jacqueline Geburtstag und erkläre wie Max und Moritz das genaue Geburtsdatum herausbekommen haben.

Lösungsvorschlag:

Man muß die zeitliche Abfolge der Informationsstände der einzelnen Personen zur Lösung berücksichtigen!

Deshalb haben wir oben in der Angabe, bereits Markierungen für einige Aussagen angebracht.

Wie ist der Wissensstand nach ...?

Nach A.:

Legende der Tabellen:
m=möglicherweise
–=sicher nicht
?=ja oder nein oder möglicherweise

	24.	25.	26.	27.	28.	29.
Juli		m	m			m
Aug				m	m	
Sept	m		m			
Okt	m	m		m		

Tabelle A: Informationsstand von Max und Moritz nach A.

Nach B.: Max weiß jetzt den Tag.

Nach C.: Moritz weiß jetzt den Monat.

Nach A. und C. für Moritz:

Insbesondere fällt aus der Tabelle A auf, dass pro Monat mindestens 2 Tage jeweils als Geburtstag in Frage kommen.

D.h. Moritz kann den Geburtstag nach C. nicht wissen.
(Was er uns auch in D. verrät.)

Nach A. und B. für Max:

Es gibt jedoch Tage in der Tabelle, für die nur ein Monat als Geburtstag in Frage kommt:
D.h. Max könnte aus der Information bei B. „Der Tag ist der 29.“ sofort schließen, dass der Geburtstag am 29. Juli ist.
Analog könnte Max aus der Information bei B. „Der Tag ist der 28.“ sofort schließen, dass der Geburtstag am 28. August ist.)

Nach E.: Moritz kann <u>nicht</u> Juli erfahren haben.
Begründung: Falls in B. Max 29. erfahren hätte, wüßte Max bereits den Geburtstag. (Es gibt nur „einen“ 29. in der Tabelle.) Widerspruch zu E. (Moritz könnte sich nicht sicher sein, dass Max das Geb.datum nicht kennt.)

Moritz kann <u>nicht</u> August erfahren haben.
Begründung: Falls in B. Max 28. erfahren hätte, wüßte Max bereits den Geburtstag. (Es gibt nur „einen“ 28. in der Tabelle.) Widerspruch zu E! (Moritz könnte sich nicht sicher sein, dass Max das Geb.datum nicht kennt.)

Nach E. wissen also sowohl Max und Moritz, dass Juli und August nicht mehr in Frage kommen.

	24.	25.	26.	27.	28.	29.
(Juli)		–	–			–
(Aug)				–	–	
Sept	?		?			
Okt	?	?		?		

Tabelle E: Mindestinformation an – von Max und Moritz nach E.

Nach A. und B. und F1.: Max hat <u>nicht</u> die 28. oder 29. erfahren.
Begründung: In beiden Fällen wüßte er aus der Tab. A bereits den Geburtstag. Widerspruch!

Nach F2.: Max kennt jetzt den Geburtstag aus seiner Version der Tabelle E, also kann der Tag nicht der 24. gewesen sein.
Begründung: In diesem Fall ist nach seiner Version der Tabelle E noch der 24. September oder der 24. Oktober möglich. Widerspruch!

	(24.)	25.	26.	27.	(28.)	(29.)
(Juli)		-	-			-
(Aug)				-	-	
Sept	-		?			
Okt	-	?		?		

Tabelle F2: Mindestinformation an – von Max und Moritz nach F2.

Nach G.: Jetzt weiß auch Moritz den Geburtstag, er weiß ja den Monat. In diesem Monat darf es also nur noch einen Tag in Tabelle F2 geben.

Also ist der Geburtstag am 26. September.

2 Pkte 3) Fermat

Ein Spezialfall von Fermats letztem Satz ist die Aussage, dass $a^3 + b^3 = c^3$ keine Lösung mit (irgendwelchen) positiven ganzen Zahlen a, b, c besitzt. In der Simpsonsfolge „Im Schatten des Genies“ schreibt Homer folgende bemerkenswerte Gleichung an die Tafel:

$$3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12} \qquad (*)$$

Wie passt das zusammen?

2 Pkte *Anspruchsvolle Zusatzfrage:* Angenommen, man kennt Fermats letzten Satz nicht. Würde es helfen, einen üblichen Taschenrechner zu besitzen und ihn zu benutzen um die Korrektheit der obigen Gleichung zu überprüfen?

Ein üblicher Taschenrechner beherrscht nur Zahlen in Zehnerpotenzschreibweise mit 16 (Mantissen-)Stellen, z.B. $\pm \underbrace{1,234567890123456}_{\text{16 Stellen}} * 10^d$ wobei d eine ganze Zahl zwischen -99 und $+99$ ist.

Lösungsvorschlag:

Annahme die Gleichung (*) ist richtig. Dann können wir mit den Potenzgesetzen umformen

$$\begin{array}{l} 3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12} \Leftrightarrow \\ (3987^4)^3 + (4365^4)^3 = (4472^4)^3 \Leftrightarrow \\ a^3 + b^3 = c^3 \end{array}$$

mit $a = 3987^4 \in \mathbb{N}$, $b = 4365^4 \in \mathbb{N}$, $c = 4472^4 \in \mathbb{N}$.

Wir hätten also ein Gegenbeispiel zum Satz von Fermat gefunden. Widerspruch!

Also wissen wir, dass die Gleichung (*) falsch sein muss!

Zur Zusatzfrage:

Nun stellen wir uns auf den Standpunkt, wir kennen den Satz von Fermat nicht und wir wollen durch eintippen in den Taschenrechner nachprüfen ob die Gleichung (*) richtig ist.

Nun bei einer Gleichung wie z.B. $1034 + 305 = 1338$ *haben wir mit einem üblichen Taschenrechner keine Schwierigkeit.*

Anders sieht es bei den riesengroßen Zahlen in (*) aus.

Wieviele Stellen brauchen wir (mindestens) zur Darstellung von 4365^{12}*?*

Nun gilt (beachte in der Rechnung $2^{10} = 1024 > 1000$*) wegen*

$$\begin{array}{rcl} 4365^{12} & > & 4000^{12} = 4^{12} \cdot 1000^{12} = 4^{12} \cdot (10^3)^{12} = \\ & = & 2^{24} \cdot 10^{36} = 2^4 \cdot 2^{20} \cdot 10^{36} = 16 \cdot (2^{10})^2 \cdot 10^{36} > \\ & > & 16 \cdot 1000^2 \cdot 10^{36} = 16 \cdot 10^6 \cdot 10^{36} = 1,6 \cdot 10^{43} \,, \end{array}$$

dass die Zahl 4365^{12} *mindestens 43 Ziffern besitzt. Außerdem ist die letzte Ziffer von* 4365^{12} *eine* 5*. (Begründung:* $5 \cdot 5 = 25$*) Damit braucht man einen Taschenrechner der mindestens 43 Mantissenstellen beherrscht.*

Mit dem üblichen Taschenrechner können Sie nur eine Näherung von 4365^{12} *intern abspeichern, wobei die ersten*[1] *12 Stellen richtig sind und alle weiteren Stellen durch Nullen ersetzt sind.*

Nachdem Sie 4365^{12} *schon nicht genau abspeichern können, können Sie die Korrektheit von (*) mit diesem üblichen Taschenrechner nicht überprüfen.*

Die Antwort ist als nein. (Ausweg mit der Hand die Rechnung fehlerfrei(!?!) durchführen. Also doch besser ein Computeralgebrasystem benutzen, dass mit entsprechender Rechenzeit auch 100 Mantissenstellen verarbeiten kann.)

[1]genauer: die ersten 11 Stellen richtig sind und die 12te Stelle gerundet ist.

3 Pkte

4) Radrennen

Dieses Frühjahr war Max Schlafmütze Schiedsrichter am Ziel beim Radrennen rund um die Neubürg. Gerade als das Rennen zu Ende ging, nickte Max Schlafmütze erschöpft ein. Er war ja auch für den Aufbau zuständig gewesen und heute schon um 3 Uhr früh aufgestanden. Als er wieder zu sich kommt, ist es schon zu spät. Er sieht die ersten Radfahrer Sophia, Marcel, Elias, Brigitte, Annelise und Tim schon im Zielraum erschöpft hinter der Ziellinie stehen. Wie konnte das nur passieren! Er musste jetzt unbedingt schnell und unauffällig herausfinden, in welcher Reihenfolge diese Radfahrer die Ziellinie passiert hatten.

Ganz cool befragt er einige umstehende Zuschauer, die ihm folgendes erwidern:

(A) Tim kam vor Brigitte ins Ziel.

(B) Annelise war nicht die letzte der Radfahrer.

(C) Genau vier weitere Radfahrer sind vor Marcel ins Ziel gekommen.

(D) Unter diesen vier Radfahrern hatte Elias den größten Vorsprung vor dem Radfahrer Marcel.

(E) Annelise kam nach Brigitte ins Ziel.

In welcher Reihenfolge sind die ersten Radfahrer ins Ziel gekommen oder reicht die vorhandene Information noch nicht aus?

Lösungsvorschlag:

Es waren 6 Radfahrer.

	1.	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*
(C) *(C,D)* *(B)*	*ein* *Elias*	*zwei*	*drei*	*vier*	*Marcel*	 $\neq$ *Annelise*

Dann wissen wir noch:

Tim $\overset{(A)}{\textit{vor}}$ *Brigitte* $\overset{(E)}{\textit{vor}}$ *Anneliese*

Zusammen mit (B) ergibt sich:

	1.	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*
	Elias	*Tim*	*Brigitte*	*Anneliese*	*Marcel*	$\neq$ *Annelise*

Dann liest man den Text nochmal genau um den Namen des sechsten Radfahrers zu erfahren:

	1.	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*
	Elias	*Tim*	*Brigitte*	*Anneliese*	*Marcel*	*Sophia*

5) Fee

Vor einigen hundert Jahren soll sich im geheimnisumwitterten Druidenhain bei Muggendorf in der Fränkischen Schweiz folgendes ereignet haben:

Eine Fee erscheint im Nebel bei Abenddämmerung einem Händler und erklärt ihm, dass er ein Geschenk erhalte. Er dürfe sich für eine der beiden Alternativen entscheiden:

a) Entweder erhält er 1 000 Gulden (viel Geld zur damaligen Zeit) oder

b) Er nennt eine natürliche Zahl n und erhält dann

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \text{ Gulden.}$$

Soweit überliefert ist, hat sich der Händler verwirrt für die sichere Alternative a) entschieden, hatte aber später große Zweifel, ob er sich richtig entschieden hatte.

Kürzlich ist seine Ururenkelin auf einen Rest einer Aufzeichnung ihres Vorfahrens gestoßen, der möglicherweise mit dem Geschenk der Fee zu tun hat:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99}\right) + \ldots \\ \leq \; & (1 + 1 + \ldots + 1 + 1) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}) + (\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}) + \ldots \\ \geq \; & 1 + (\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}) + (\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{1}{100} + \frac{1}{100}) + \ldots \end{aligned}$$

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Der Rest der Überlegungen ist leider von Mäusen aufgefressen...

4 Pkte

Frage I: War die Entscheidung mit Alternative a) gut? Oder ist die Alternative b) mit einer *geeigneten* Zahl n besser? Falls die Alternative b) besser sein sollte, mit welcher Zahl n bekommt man mit b) sicher 2 000 Gulden?

Seine Ururenkelin, ihres Zeichens Mathe-Genie, auf Urlaub in der Fränkischen Schweiz, hat sich natürlich genau überlegt, was sie der Fee antworten würde, falls auch sie die Fee treffen würde. Und wie es der Zufall will, auch sie trifft die Fee, allerding im dunklen Wald bei Goldkronach am Rand des Fichtelgebirges.

Auch das Angebot ist ein wenig angepasst:

Die Fee erklärt der Ururenkelin, dass auch sie ein Geschenk erhalte. Sie dürfe sich für eine der beiden Alternativen entscheiden:

α) Sie erhält 1 Kilogramm Gold oder

β) Sie nennt eine natürliche Zahl n und erhält dann $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(n)$ Gramm Gold.

Für die neue Fee-Funktion gilt:

$$f(k) = \begin{cases} 1/k & \text{falls die Zahl } k \text{ keine Nullen} \\ & \text{in der üblichen Zifferndarstellung enthält,} \\ 0 & \text{falls die Zahl } k \text{ mindestens eine Null} \\ & \text{in der üblichen Zifferndarstellung enthält.} \end{cases}$$

Zum Beispiel gilt für die Fee-Funktion $f(15) = 1/15$, $f(243) = 1/243$, aber $f(20) = 0$, $f(100) = 0$, $f(101) = 0$ und $f(110) = 0$ usw.

Frage II:
Welche Alternative ist besser?
4 Pkte
Wenn man sich für β) entscheidet, wie muss man dann n wählen, dass man mindestens 2 Kilogramm Gold erhält?
Ist es möglich auch 100 Kilogramm Gold zu bekommen?

Lösungsvorschlag zu Frage I:

$$\begin{aligned} & 1+(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{10})+(\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{100})+\ldots+(\frac{1}{1+10^{r-1}}+\ldots+\frac{1}{10^r}) \\ \geq\ & 1+9\cdot\frac{1}{10}+90\cdot\frac{1}{100}+\ldots+\frac{9}{10}=1+r\cdot\frac{9}{10} \end{aligned}$$

Mit $n=10^r$ erhält man mit b) sicher $1+r\cdot\frac{9}{10}$ Gulden.

Mit $r\to\infty$ geht auch $1+r\cdot\frac{9}{10}\to\infty$.

Lösung b) ist besser.

Wie soll man n (bzw. r) wählen, damit man sicher 2000 Gulden bekommt?

Antwort: $n\geq 10^{2222}$ langt.

Begründung: $1+r\cdot\frac{9}{10}\geq 2000 \Leftrightarrow r\geq 1999\cdot\frac{10}{9}=2221,11\ldots \Leftarrow r=2222$

Lösungsvorschlag zu Frage II:

Def: gefährliche Zahl = mindestens eine Null in der Zahldarstellung

Def: ungefährliche Zahl = keine Null in der Zahldarstellung

Zwischen 10 und 99 gibt es $9\cdot 9$ ungefährliche Zahlen von $9\cdot 10$ Zahlen.

Zwischen 100 und 999 gibt es 9^3 ungefährliche Zahlen von $9\cdot 10^2$ Zahlen.

Zwischen 1000 und 9999 gibt es 9^4 ungefährliche Zahlen von $9\cdot 10^3$ Zahlen.

...

$$\begin{aligned} f(1)+\ldots+f(10^p) &= \overbrace{f(1)+f(2)+\ldots+f(9)}^{\leq 9}+ \\ &+ f(10)+\ldots+f(99)+ \\ &+ f(100)+\ldots+f(999)+ \\ &+ f(1000)+\ldots+f(9999)+ \\ &+ \ldots+ \\ &+ f(10^{p-1})+\ldots+f(10^p-1)+\underbrace{f(10^p)}_{=0}\leq \\ &\leq 9+\frac{1}{10}\cdot 9^2+\frac{1}{100}\cdot 9^3+\frac{1}{1000}\cdot 9^4+\ldots+10^{p-1}\cdot 9^p\leq \\ &\leq 9\cdot\left(1+\frac{9}{10}+(\frac{9}{10})^2+(\frac{9}{10})^3+\ldots+(\frac{9}{10})^{p-1}\right)\leq \\ &\leq 9\cdot\frac{1-(\frac{9}{10})^p}{1-\frac{9}{10}}\leq 9\cdot\frac{1}{1-\frac{9}{10}}=90 \end{aligned}$$

Mit der Wahl von β) – egal wie groß man $n=10^p$ wählt – bekommt man höchstens 90 Gramm Gold.

Die Variante α) mit 1 Kilogramm Gold ist also sehr viel besser!