Klassenstufe 7-8 / Lösungsvorschläge

Bitte jeweils in Teams von 3-5 Schülern bearbeiten.

Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

4 Pkte 1) Alter des Mathelehrers

Der Mathelehrer wird vom Chemielehrer gefragt wie alt er sei. Er antwort in einem Rätsel:

„Mein Alter läßt sich sowohl als $1 + x^y$ schreiben als auch als $a \cdot b^c$, wobei x, y, a, b, c allesamt Primzahlen sind.“

Nach längerem Überlegen meint der Chemielehrer, das ist aber noch nicht eindeutig.

Daraufhin ergänzt der Mathelehrer:

„Ja, stimmt. Ich gebe noch einen Tip: Es ist die zweitniedrigste Lösung.“

Daraufhin meint der Chemielehrer: „Jetzt weiß ich es.“

Aufgabe: Berechne (und begründe) das Alter des Mathelehrers.
Bedenke: 1 ist keine Primzahl!

Schneller Lösungsvorschlag 1 (Schleife über x und y in der Menge der Primzahlen):

Bemerkung: Die Menge der Primzahlen sei mit $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...\}$ *bezeichnet.*

Bedenke: $\boxed{1}$ *ist keine Primzahl!*

Untersuche:

Sei $x = 2$ *und betrachte Schleife über* $y \in P$*:*

$$1 + 2^2 = 5 = \boxed{1} \cdot 5^{\boxed{1}} \quad \textit{Widerspruch}, a = 1 \notin P \textit{ und } c = 1 \notin P$$
$$1 + 2^3 = 9 = \boxed{1} \cdot 3^2 = 3 \cdot 3^{\boxed{1}} \quad \textit{Widerspruch}$$
$$1 + 2^5 = 33 = 3 \cdot 11^{\boxed{1}} = 11 \cdot 3^{\boxed{1}} \quad \textit{Widerspruch}$$
$$1 + 2^7 > 100 \quad \textit{Widerspruch, zu groß für Alter Mathelehrer!}$$

STOP, Schleife über y.

Sei $x = 3$ *und betrachte Schleife über* $y \in P$*:*

$$1 + 3^2 = 10 = 2 \cdot 5^{\boxed{1}} = 5 \cdot 2^{\boxed{1}} \quad \textit{Widerspruch}$$
$$1 + 3^3 = 28 = 7 \cdot 2^2 \quad \boxed{\textit{Eine Lösung gefunden:}} \quad x = y = 3, a = 7, b = c = 2$$
$$1 + 3^5 > 100 \quad \textit{Widerspruch, zu groß für Alter Mathelehrer!}$$

STOP, Schleife über y.

Sei $x = 5$ *und betrachte Schleife über* $y \in P$*:*

$$1 + 5^2 = 26 = 2 \cdot 13^{\boxed{1}} = 13 \cdot 2^{\boxed{1}} \quad \textit{Widerspruch}$$
$$1 + 5^3 > 100 \quad \textit{Widerspruch, zu groß für Alter Mathelehrer!}$$

STOP, Schleife über y.

Sei $x = 7$ *und betrachte Schleife über* $y \in P$*:*

$$1 + 7^2 = 50 = 2 \cdot 5^2 \quad \boxed{\textit{Eine Lösung gefunden:}} \quad x = 7, b = 5, y = a = c = 2$$
$$1 + 7^3 > 100 \quad \textit{Widerspruch, zu groß für Alter Mathelehrer!}$$

STOP, Schleife über y.

Sei $x = 11$ *und betrachte Schleife über* $y \in P$*:*

$$1 + 11^2 > 100 \quad \textit{Widerspruch, zu groß für Alter Mathelehrer!}$$

STOP, Schleife über y.

STOP, Schleife über x.

Gesucht war die zweitniedrigste Lösung.

Endergebnis: $\boxed{\textit{Der Mathelehrer ist 50 Jahre.}}$

Langsamer Lösungsvorschlag 2 (Schleife über a, b, c in der Menge der Primzahlen):

Ähnlich, aber hier muss man wesentlich mehr ausrechnen!

3 Pkte 2) Ritter

Auf der Burg Felsenstein lebt der Ritter von Hinkelstein mit seinen drei Kindern Wendell, Jobst und Mathes. Eines der Ritterkinder hat das Schwert des Vaters versteckt und der Vater muss jetzt den Schuldigen finden.

Der Vater weiß, dass das Kind, welches schuldig ist, lügt, und dass die unschuldigen Geschwister die Wahrheit sagen.

Finde aus der folgenden Unterhaltung heraus, welches Kind Vaters Schwert versteckt hat.

Wendell murmelt etwas. Vater von Hinkelstein fragt, was Wendell gesagt hat. „Er sagt, dass er das Schwert versteckt hat,“ erklärt Jobst. „Jobst du lügst“, ruft Mathes. Ritter von Hinkelstein weiß nun, wer der Übeltäter war. Du auch?

Gib den Namen des Übeltäters an.

Lösungsvorschlag:

W=Wendell, J=Jobst, M=Mathes

T=Täter & lügt
u=unschuldig & spricht die Wahrheit

Es gibt 3 Fälle die überprüft werden müssen:

Fall I:

W	*T*	*W müsste* ich bin unschuldig *gesagt haben (weil er Täter ist und lügt)*
J	*u*	⇑ *W hat gesagt, er hat das Schwert versteckt.* ⇒ *Widerspruch, da J die Wahrheit sagen müsste,* *d.h. richtig wäre: W hat gesagt, dass er unschuldig ist.*
M	*u*	...

Fall I ist falsch.

Fall II:

W	*u*	*W müsste* ich bin unschuldig *gesagt haben* *(weil er unschuldig ist und die Wahrheit spricht)*
J	*u*	⇑ *W hat gesagt, er hat das Schwert versteckt.* ⇒ *Widerspruch, da J die Wahrheit sagen müsste,* *d.h. richtig wäre: W hat gesagt, dass er unschuldig ist.*
M	*T*	...

Fall II ist falsch.

Fall III:

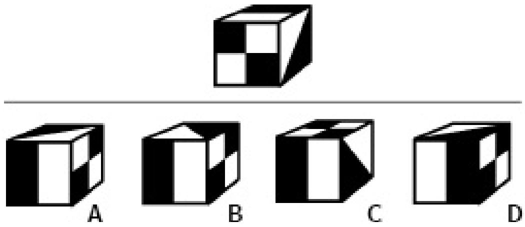
W	*u*	*W müsste* ich bin unschuldig *gesagt haben* *(weil er unschuldig ist und die Wahrheit spricht)*
J	*T*	⇑ *W hat gesagt, er hat das Schwert versteckt.* *richtig, weil er ja lügt.*
M	*u*	*J du lügst. (richtig, weil M die Wahrheit spricht)*

Fall III ist möglich und Fall I und II sind unmöglich.

Endergebnis: Jobst ist der Täter.

3 Pkte 3) Würfel

Welcher der unten abgebildeten Würfel entspricht dem von oben?



Lösungsvorschlag:

Wenn man annehmen darf, dass mindestens zwei der drei Seitenflächen des oberen Würfels wieder auf den Seitenflächen der vier unteren Würfel sichtbar sind, dann sind B, C, D nicht möglich und es ist nur A möglich.

5 Pkte 4) Tür

Eine Tür wurde am Computer mit einer Breite von 885 mm und einer Höhe von 1475 mm als Spezifikation (*) entworfen, damit sie in einen rechteckigen Türstock von 895 mm auf 1485 mm passt.

Der Spalt zwischen Tür und Türstock darf auf jeder Seite nicht größer als 7 mm sein, damit die Tür verlässlich schließt.

Im angenommenen Temperaturbereich wird sich die Tür höchstens um 0,2 % in der Breite und Höhe ausdehnen. Der Türrahmen wird sich im angenommenen Temperaturbereich nicht ausdehnen.

Zu allen Zeiten, auch wenn die Tür sich ausgedehnt hat, muss auf jeder der vier Seiten der Tür ein Abstand von 1 mm zum Türrahmen sein.

Die Tür muss in der Schreinerei jetzt nicht ganz genau nach der Spezifikation (*) hergestellt werden, aber es gibt Einschränkungen.

In welchem Intervall darf die Breite, in welchem Intervall darf die Höhe der Tür liegen, damit die angegebenen Nebenbedingungen eingehalten werden?

(Rechne wie die Schreiner in ganzen Millimetern!)

Lösungsvorschlag:

Wir haben in dieser Aufgabe einen Türrahmen mit der Breite $895mm$ *und der Höhe* 1485 *mm gegeben und müssen eine Tür bauen die Folgende Bedingungen erfüllt:*

- *Der Spalt zwischen Tür und Rahmen darf niemals gröer als* $7mm$ *sein, damit die Tür gut schließt!*
- *Der Spalt zwischen Tür und Rahmen darf niemals kleiner als* $1mm$ *werden, damit die Tür nicht klemmt!*
- *An wärmeren Tagen dehnt sich die Tür um bis zu* $0,2\%$ *aus!*

Gesucht ist in der Aufgabe in welchem Intervall Breite und Höhe der Tür liegen können, d.h. was ist die kleinste und größte Breite und Höhe mit der wir die Tür bauen können damit die geforderten Bedingungen erfüllt sind!

<u>Fall 1</u>: Wir nehmen hier an, dass es ein kalter Tag ist und sich die Tür somit nicht ausgedehnt hat.

In diesem Fall können wir die kleinste Breite der Tür berechnen, indem wir von der Breite des Türrahmens einen $7mm$ *großen Spalt auf der linken Seite und einen* $7mm$ *großen Spalt auf der rechten Seite abziehen, also*

$$\textit{Kleinste Breite } = 895mm - 2 \cdot 7mm = 895mm - 14mm = 881mm.$$

Mit der gleichen Idee können wir die kleinste Höhe der Tür berechnen und erhalten

$$\textit{Kleinste Höhe } = 1485mm - 2 \cdot 7mm = 1485mm - 14mm = 1471mm.$$

Vorsicht*: Wir können die größte Höhe und Breite der Tür nicht an einem kalten Tag berechnen, da sonst der Spalt zwischen Tür und Rahmen evtl. zu klein wird, wenn sich die Tür ausdehnt!*

Fall 2: *Wir nehmen an, es ist ein sehr heißer Sommertag und die Tür hat sich um* $0,2\%$ *ausgedehnt. Um die größtmögliche Breite der Tür zu ermitteln müssen wir nun nachprüfen, dass der Spalt zwischen Tür und Rahmen an jeder Seite mindestens* $1mm$ *groß ist. Wenn wir mit* b *die Breite der Tür bezeichnen, erhalten wir*

$$b + 0,2\% \cdot b \leq 895mm - 2 \cdot 1mm = 893mm$$

$$\Rightarrow \frac{1002}{1000} \cdot b \leq 893mm.$$

Dies können wir umformen zu

$$b \leq \frac{1000}{1002} \cdot 893mm$$

oder etwas umgeschrieben

$$b \leq \frac{1002}{1002} \cdot 893mm - \frac{2}{1002} \cdot 893mm = 893mm - \frac{2}{1002} \cdot 893mm.$$

Den Term

$$\frac{2}{1002} \cdot 893mm$$

schätzen wir nun ab, indem wir sagen

$$\frac{2}{1002} \cdot 893mm \approx \frac{2}{1000} \cdot 1000mm = 2mm$$

und erhalten damit

$$\text{größte Breite} \approx 893mm - 2mm = 891mm.$$

Die größtmögliche Höhe der Tür lässt sich genauso berechnen. Wenn h *die Höhe der Tür bezeichnet berechnen wir*

$$h + 0,2\% \cdot h \leq 1485mm - 2 \cdot 1mm = 1483mm$$

$$\Rightarrow \frac{1002}{1000} \cdot h \leq 1483mm$$

und dann mit den gleichen Zwischenschritten wie oben

$$h \leq 1483mm - \frac{2}{1002} \cdot 1483mm.$$

Danach schätzen wir ab, dass

$$\frac{2}{1002} \cdot 1483mm \approx \frac{2}{1000} \cdot 1500mm = 2 \cdot 1,5mm = 3mm$$

und erhalten damit

$$\text{größte Höhe} \approx 1483mm - 3mm = 1480mm.$$

Vorsicht: *Wir können die kleinste Höhe und Breite der Tür nicht an dem heißen Sommertag berechnen, da sonst z.B. im Winter die Tür wieder kleiner wird und somit dann der Spalt zwischen Tür und Rahmen evtl. größer als* $7mm$ *ist!*

Sammeln wir nun also die Ergebnisse aus beiden Fällen: Die Breite unserer Tür muss aus dem Intervall $[881mm, 891mm]$ *sein und die Höhe der Tür aus dem Intervall* $[1471mm, 1480mm]$.

12 Pkte 5) Freitag der 13te

Schüler Kurt liebt „Freitag den 13ten“. Da hat er immer besonders gute Noten in Schulaufgaben. Er hat sich nämlich folgendes überlegt: *Glück und Pech sind gleichverteilt. An einem „Freitag dem 13ten“ bilden sich aber fast alle Leute ein Pech zu haben, da bleibt für mich viel mehr Glück übrig.* Damit ist er immer gut gefahren. Auch vor zwei Jahren beim 8. Tag der Mathematik an einem 13. Juli 2013 hat er ganz besonders gut abgeschnitten. 13 ist einfach seine Glückszahl.

Kürzlich hat er seine Großtante Fronicka Abergläubisch kennengelernt, die auf der fast verfallenen und finsteren Burg Rabeneck in der Fränkischen Schweiz lebt. Fronicka Abergläubisch hat schreckliche Angst vor jedem „Freitag den 13ten“, da passiert immer etwas Entsetzliches auf ihrer Burg: Entweder geistert Schlossgespenst Ritter Kunibert ohne Kopf bereits zur Mittagszeit durch die Gemächer und erschreckt die seltenen Burgbesucher oder sonst etwas schreckliches passiert. Natürlich hat auch die Telekom noch keinen Internetanschluß bis auf die entlegene Burg Rabeneck gelegt. Deshalb hat Großtante Fronicka Abergläubisch auch keinen Internetzugang mit dem sie die zukünftigen Kalender 2016, 2017 und so weiter abrufen könnte und genau schauen könnte, wann die nächsten „Freitage der 13te“ auftauchen.

Sie erzählt dem kleinen Kurt ihren größten Wunsch: „Ein ganzes Jahr ohne einen Freitag den 13tein.“

Außerdem fürchtet sie sich davor, dass im Abstand von vier Wochen zwei „Freitage den 13ten“ auftreten, dann wird nämlich einer alten Vorhersage nach, 3/13 des zugehörigen Waldes vom Sturm zerstört.

Ganz besondere Angst hat sie vor einem Jahr mit 13 „Freitagen dem 13ten“, da wird nämlich nach einer uralten Vorhersage eines Druiden die Burg Rabeneck in Staub verwandelt.

Nun kann Schüler Kurt seine Großtante bei der letzten Vorhersage überzeugend beruhigen: Es gibt ja höchstens 12 Monate im Jahr, da können in einem Jahr 13 „Freitage den 13ten“ gar nicht auftreten.

„Aber wieviele der schrecklichen „Freitage den 13ten“ können denn in einem beliebigen Jahr überhaupt auftreten“, fragt Großtante Fronicka den kleinen Kurt. „Du gehst doch jetzt auf die Schule und hast ganz viel Mathematik gelernt!“

Der kleine Kurt rechnets aus, aber leider ist sein Schmierzettel zum Anzünden des Kamins benutzt worden, einzig bekannt ist, dass eine Fallunterscheidung nach Schaltjahren oder Nicht-Schaltjahren sinnvoll ist.

Aufgaben: Beantworte mit Begründung folgende Fragen:

a) Wie viele „Freitage den 13ten“ können denn in einem beliebigen Jahr überhaupt auftreten?

b) Gibt es ein ganzes Jahr ohne einen „Freitag den 13ten“?

c) Ist es möglich, das zwei „Freitage den 13ten“ im Abstand von 4 Wochen in einem Jahr auftreten?


Schr-ecklich!!
Fr. 13. Mai
Schön
Führung täglich
Aber-gläub-isch
heute geschlossen
Waischenfeld 40 min
Burg Rabeneck 2 min

Lösungsvorschlag (effiziente Lösung mit 7er Resten):

Um diese Aufgabe zu lösen, legen wir zunächst einmal fest, dass der 13. März auf den Wochentag

$$X \in \{\text{Mo, Di, Mi, Do, Fr, Sa, So}\}$$

fällt und stellen uns dann eine Tabelle auf, an welchem Wochentag der 13. in den anderen Monaten des Jahres ist (rückwärts rechnen für Januar und Februar und hierbei unterscheiden ob es sich um ein Schaltjahr handelt oder nicht und vorwärts rechnen für April bis Dezember). Dabei müssen wir beachten, dass wir nach 7 Tagen jeweils immer wieder auf dem gleichen Wochentag landen, also z.B.

$$X + 7 = X + 0, \; X + 8 = X + 1, \; X + 9 = X + 2, \; \text{usw.}$$

also insbesondere

$$\begin{aligned} X + 28 &= X + 0, \\ X + 29 &= X + 1, \\ X + 30 &= X + 2, \\ X + 31 &= X + 3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X - 28 &= X + 0, \\ X - 29 &= X - 1 = X + 6, \\ X - 31 &= X - 3 = X + 4. \end{aligned}$$

	Wochentag (kein Schaltjahr)	Wochentag (Schaltjahr)
13. Januar	$X + 0 - 31 = X + 4$	$X + 6 - 31 = X + 3$
13. Februar	$X - 28 = X + 0$	$X - 29 = X + 6$
13. März	X	X
13. April	$X + 31 = X + 3$	$X + 3$
13. Mai	$X + 3 + 30 = X + 5$	$X + 5$
13. Juni	$X + 5 + 31 = X + 1$	$X + 1$
13. Juli	$X + 1 + 30 = X + 3$	$X + 3$
13. August	$X + 3 + 31 = X + 6$	$X + 6$
13. September	$X + 6 + 31 = X + 2$	$X + 2$
13. Oktober	$X + 2 + 30 = X + 4$	$X + 4$
13. November	$X + 4 + 31 = X + 0$	$X + 0$
13. Dezember	$X + 0 + 30 = X + 2$	$X + 2$

Also erhalten wir für ein normales Jahr

- 3 mal den Tag $X + 0$
- 1 mal den Tag $X + 1$
- 2 mal den Tag $X + 2$
- 2 mal den Tag $X + 3$
- 2 mal den Tag $X + 4$
- 1 mal den Tag $X + 5$
- 1 mal den Tag $X + 6$

und für ein Schaltjahr

- 2 mal den Tag $X + 0$
- 1 mal den Tag $X + 1$
- 2 mal den Tag $X + 2$
- 3 mal den Tag $X + 3$
- 1 mal den Tag $X + 4$
- 1 mal den Tag $X + 5$
- 2 mal den Tag $X + 6$

a) Mit obigen Ergebnissen können wir also sagen, dass in einem Jahr entweder 1, 2, oder 3 Freitage auf den 13. des Monats fallen (egal ob Schaltjahr oder nicht).

b) Es gibt in jedem Jahr immer mindestens einen Freitag den 13.

c) Falls kein Schaltjahr ist (und somit der Februar $28 = 4 \cdot 7$ Tage hat), dann ist der Wochentag am 13. Februar der Gleiche wie am 13. März. D.h. fällt in einem normalen Jahr der 13. Februar auf einen Freitag hat man 4 Wochen später ebenfalls einen Freitag den 13. im März.

(Man beachte, c) kann man durch einfaches überlegen auch ohne die Lösung von a) und b) herausbekommen!)