Universität Bayreuth | Mathematikwettbewerb
10. Tag der Mathematik | 11. Juli 2015

Klassenstufe 11-12

Bitte jeweils in Teams von 3-5 Schülern bearbeiten.
Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

4 Pkte

1) Bankraub

Die kleine Daisy wohnt auf Money Island, einer kleinen Insel irgendwo, weit abgeschieden in den Weiten der sieben Weltmeere. Fremde kamen hier zuletzt vor 200 Jahren an. Die Inselbewohner leben also durchweg unter sich. Verkehrstechnisch ist Money Island gut erschlossen, allerdings nicht mit Straßen wie hierzulande, sondern mit Kanälen, auf welchen die Einwohner mit Booten unterwegs sind. Aufgrund der begrenzten Rohstoffe auf Money Island, gibt es die wasserfeste und vor Rost schützende Bootslackierung nur in den Farben dunkelrot und grau. Graue Farbe ist billiger und so haben nur 500 der Bootsbesitzer ein rotes Gefährt, die übrigen 1500 besitzen ein graues.

Eines Tages passiert es: Die kleine Daisy wird Zeuge eines Banküberfalls. Kurz vor Schalterschluss, es dämmerte bereits, wurde der Kassier dazu genötigt, große Mengen des Geldbestandes herauszugeben. Bei der Vernehmung durch die Polizei gibt die kleine Daisy an, sie hätte unter Schock gestanden und wüsste nicht mehr allzu viel. Sie könne sich aber daran erinnern, dass der Täter auf einem roten Boot geflohen sei. Dem Inselpolizisten leuchtet sofort ein, dass er nun alle Halter roter Boote überprüfen muss. „Wer sagt uns eigentlich, dass die kleine Daisy rot und grau in der Dämmerung nicht einfach verwechselt hat?“, wirft der Staatsanwalt ein. Die beiden beraten sich kurz und entscheiden dann, dass Daisys Trefferquote beim Erkennen von rot und grau in der Dämmerung ermittelt werden müsse. Zu diesem Zweck wird am folgenden Abend vor der ausgeraubten Bank zur allgemeinen Erheiterung der anwesenden Zaungäste eine Show mit schnell vorbeifahrenden roten und grauen Booten veranstaltet. Die kleine Daisy muss jeweils angeben, ob das Boot rot oder grau war.

Ergebnis: Wenn das Boot tatsächlich rot ist, dann erkennt dies Daisy in 80 % der Fälle richtig; in 20 % der Fälle sagt sie fälschlicherweise, das Boot wäre grau. Wenn das Boot tatsächlich grau ist, dann erkennt Daisy dies in 60 % der Fälle richtig; in 40 % der Fälle liegt sie falsch.

Der Inselpolizist und der Staatsanwalt fragen sich nun, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Täter mit einem roten Boot flüchtete.

(a) Berechne die gesuchte Wahrscheinlichkeit! Die Boote welcher Farbe stehen also unter Verdacht?

(b) Die Halter von Booten welcher Farbe sollte der Inselpolizist zuerst überprüfen? Oder anders gefragt: Bei den Booten welcher Farbe hat der Inselpolizist die höhere Trefferwahrscheinlichkeit pro Boot bei seiner Überprüfung?

1 Pkt

2) Funktion

Es sei f eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion mit positiven Funktionswerten, die die zwei Eigenschaften $f(1) = 4$ und $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ erfüllt. Welchen Zahlenwert hat die Funktion f an der Stelle $\frac{1}{2}$?

3) Fee

Vor einigen hundert Jahren soll sich im geheimnisumwitterten Druidenhain bei Muggendorf in der Fränkischen Schweiz folgendes ereignet haben:

Eine Fee erscheint im Nebel bei Abenddämmerung einem Händler und erklärt ihm, dass er ein Geschenk erhalte. Er dürfe sich für eine der beiden Alternativen entscheiden:

a) Entweder erhält er 1 000 Gulden (viel Geld zur damaligen Zeit) oder

b) Er nennt eine natürliche Zahl n und erhält dann

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \text{ Gulden.}$$

Soweit überliefert ist, hat sich der Händler verwirrt für die sichere Alternative a) entschieden, hatte aber später große Zweifel, ob er sich richtig entschieden hatte.

Kürzlich ist seine Ururenkelin auf einen Rest einer Aufzeichnung ihres Vorfahrens gestoßen, der möglicherweise mit dem Geschenk der Fee zu tun hat:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99}\right) + \ldots \\ \leq \; & (1 + 1 + \ldots + 1 + 1) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}) + (\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}) + \ldots \\ \geq \; & 1 + (\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}) + (\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{1}{100} + \frac{1}{100}) + \ldots \end{aligned}$$

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Der Rest der Überlegungen ist leider von Mäusen aufgefressen...

4 Pkte

Frage I:
War die Entscheidung mit Alternative a) gut?
Oder ist die Alternative b) mit einer *geeigneten* Zahl n besser?
Falls die Alternative b) besser sein sollte, mit welcher Zahl n bekommt man mit b) sicher 2 000 Gulden?

Seine Ururenkelin, ihres Zeichens Mathe-Genie, auf Urlaub in der Fränkischen Schweiz, hat sich natürlich genau überlegt, was sie der Fee antworten würde, falls auch sie die Fee treffen würde. Und wie es der Zufall will, auch sie trifft die Fee, allerding im dunklen Wald bei Goldkronach am Rand des Fichtelgebirges.

Allerdings ist das Angebot ein wenig angepasst:

Die Fee erklärt der Ururenkelin, dass auch sie ein Geschenk erhalte. Sie dürfe sich für eine der beiden Alternativen entscheiden:

α) Sie erhält 1 <u>Kilogramm</u> Gold oder

β) Sie nennt eine natürliche Zahl n und erhält dann $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(n)$ <u>Gramm</u> Gold.

Für die neue Fee-Funktion gilt:

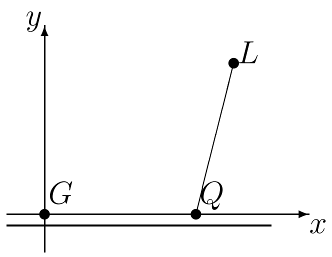
$$f(k) = \begin{cases} 1/k & \text{falls die Zahl } k \text{ keine Nullen} \\ & \text{in der üblichen Zifferndarstellung enthält,} \\ 0 & \text{falls die Zahl } k \text{ mindestens eine Null} \\ & \text{in der üblichen Zifferndarstellung enthält.} \end{cases}$$

Zum Beispiel gilt für die Fee-Funktion $f(15) = 1/15$, $f(243) = 1/243$, aber $f(20) = 0$, $f(100) = 0$, $f(101) = 0$ und $f(110) = 0$ usw.

4 Pkte

Frage II:
Welche Alternative ist besser?
Wenn man sich für β) entscheidet, wie muss man dann n wählen, dass man mindestens 2 Kilogramm Gold erhält?
Ist es möglich auch 100 Kilogramm Gold zu bekommen?

6 Pkte 4) Motorradralley



Die Teilnehmer einer Motorrad-Rallye in der Fränkischen Schweiz erfahren am Kontrollpunkt Großziegenfeld $G(0,0)$, dass sie als nächstes einen Kontrollpunkt $L(5,2)$ (Ludwigs Bratwurststand) anzufahren haben. (Ludwigs Bratwurststand ist schon kilometerweit an der hohen weißen Rauchsäule und dem Duft der verbrannten Kiefernzapfen zu erkennen.) Weiter wird ihnen bekanntgegeben, dass es die örtlichen Gegebenheiten zulassen, auf der Landstraße (x-Achse) im Mittel $v_1 = 80$ [km/h], und in der unebenen Wiese mit versteckten Felsbrocken ($y > 0$) im Mittel $v_2 = 20$ [km/h] zu fahren.

An welcher Stelle $Q(x,0)$ sollten die Motorsportler die Landstraße verlassen, um schnellstens in L zu ihren Bratwürsten zu kommen?

(Die Einheiten der Punkte sind in km gegeben.)

10 Pkte 5) Jacqueline

Jacqueline, die französische Austauschschülerin, wird von den beiden Schülern Max und Moritz angebetet und verehrt. Max und Moritz sind sich gegenseitig spinnefeind. Beide fragen einzeln Jacqueline nach ihrem Geburtstag, da jeder ihr ein Geschenk mit der Post nach Frankreich schicken will, wenn sie wieder zuhause ist.

So einfach will sie ihren Geburtstag aber nicht verraten.

In der großen Pause erzählt sie laut ihren Freundinnen – in Hörweite der spinnefeinden Schüler Max und Moritz – dass sie an einem der folgenden Tage Geburtstag hat: 25. Juli, 26. Juli, 29. Juli, 27. August, 28. August, 24. September, 26. September, 24. Oktober, 25. Oktober, 27. Oktober.

In der folgenden Englischstunde verrät sie Max flüsternd nur den Tag ihres Geburtstags. In der darauffolgenden Physikstunde verrät sie Moritz flüsternd nur den Monat ihres Geburtstags.

Max würde seinem Feind Moritz nie den Tag und umgekehrt Moritz seinem Feind Max nie den Monat verraten.

Bei Schulschluss hört sie jedoch folgendes Gespräch zwischen den beiden:

Moritz: „Ich weiß leider nicht wann Jacqueline Geburtstag hat. Schade! Aber, hihi! Hihi! Aber ich weiß, dass Du es auch nicht weißt! Hihi!“

Max: „Ich wusste bisher auch nicht, wann Jacqueline Geburtstag hat. Aber jetzt weiss ich das genaue Datum.“

Moritz entgegnet: „Jetzt weiß ich auch das genaue Datum.“

Frage: Wann hat also Jacqueline Geburtstag? Erkläre wie Max und Moritz das genaue Geburtsdatum herausbekommen haben.

(Man darf davon ausgehen, dass Moritz weiß, dass Max den Tag des Geburtstags erfahren hat. Ebenso weiß Max, das Moritz den Monat des Geburtstags erfahren hat.)

2 Pkte 6) Fermat

Ein Spezialfall von Fermats letztem Satz ist die Aussage, dass $a^3 + b^3 = c^3$ keine Lösung mit positiven ganzen Zahlen a, b, c besitzt. In der Simpsonsfolge „Im Schatten des Genies“ schreibt Homer folgende bemerkenswerte Gleichung an die Tafel:

$$3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$$

Wie passt das zusammen?

2 Pkte *Anspruchsvolle Zusatzfrage:* Angenommen, man kennt Fermats letzten Satz nicht. Würde es helfen, einen üblichen Taschenrechner zu besitzen und ihn zu benutzen um die Korrektheit der obigen Gleichung zu überprüfen?

Ein üblicher Taschenrechner beherrscht nur Zahlen in Zehnerpotenzschreibweise mit 16 (Mantissen-)Stellen, z.B. $\pm\underbrace{1,234567890123456}_{\text{16 Stellen}}*10^d$ wobei d eine ganze Zahl zwischen -99 und $+99$ ist.

Viel Spaß beim Lösen der Aufgaben!