Klassenstufe 9-10

Bitte jeweils in Teams von 3-5 Schülern bearbeiten.
Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

6 Pkte

1) Mähdrescher

Vor der Dreschsaison kommen die drei Mähdrescher von Bauer Huber in die Landmaschinenwerkstatt zur Reperatur.

Repariert der Auszubildende die drei Mähdrescher alleine, dann dauert das 15 Stunden länger als, wenn der Meister die drei Mähdrescher alleine repariert. Arbeiten beide zusammen, so sind sie 5 Stunden früher fertig, als wenn der Meister alleine repariert.

Wie lange braucht der Meister, um die drei Mähdrescher alleine zu reparieren?

Und wie lange braucht der Auszubildende allein?

Wie lange brauchen beide zusammen?

(Probe!)

10 Pkte

2) Jacqueline

Jacqueline, die französische Austauschschülerin, wird von den beiden Schülern Max und Moritz angebetet und verehrt. Max und Moritz sind sich gegenseitig spinnefeind. Beide fragen einzeln Jacqueline nach ihrem Geburtstag, da jeder ihr ein Geschenk mit der Post nach Frankreich schicken will, wenn sie wieder zuhause ist.

So einfach will sie ihren Geburtstag aber nicht verraten.

In der großen Pause erzählt sie laut ihren Freundinnen – in Hörweite der spinnefeinden Schülern Max und Moritz – dass sie an einem der folgenden Tage Geburtstag hat: 25. Juli, 26. Juli, 29. Juli, 27. August, 28. August, 24. September, 26. September, 24. Oktober, 25. Oktober, 27. Oktober.

In der folgenden Englischstunde verrät sie Max flüsternd nur den Tag ihres Geburtstags. In der darauffolgenden Physikstunde verrät sie Moritz flüsternd nur den Monat ihres Geburtstags.

Max würde seinem Feind Moritz nie den Tag und umgekehrt Moritz seinem Feind Max nie den Monat verraten.

Bei Schulschluss hört sie jedoch folgendes Gespräch zwischen den beiden:

Moritz: „Ich weiß leider nicht wann Jacqueline Geburtstag hat. Schade! Aber, hihi! Hihi! Aber ich weiß, dass Du es auch nicht weißt! Hihi!“

Max: „Ich wusste bisher auch nicht, wann Jacqueline Geburtstag hat. Aber jetzt weiß ich das genaue Datum.“

Moritz entgegnet: „Jetzt weiß ich auch das genaue Datum.“

Frage: Wann hat also Jacqueline Geburtstag? Erkläre wie Max und Moritz das genaue Geburtsdatum herausbekommen haben.

2 Pkte 3) Fermat

Ein Spezialfall von Fermats letztem Satz ist die Aussage, dass $a^3 + b^3 = c^3$ keine Lösung mit positiven ganzen Zahlen a, b, c besitzt. In der Simpsonsfolge „Im Schatten des Genies“ schreibt Homer folgende bemerkenswerte Gleichung an die Tafel:

$$3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$$

Wie passt das zusammen?

2 Pkte *Anspruchsvolle Zusatzfrage:* Angenommen, man kennt Fermats letzten Satz nicht. Würde es helfen, einen üblichen Taschenrechner zu besitzen und ihn zu benutzen um die Korrektheit der obigen Gleichung zu überprüfen?

Ein üblicher Taschenrechner beherrscht nur Zahlen in Zehnerpotenzschreibweise mit 16 (Mantissen-)Stellen, z.B. $\pm\underbrace{1,234567890123456}_{\text{16 Stellen}}*10^d$ wobei d eine ganze Zahl zwischen -99 und $+99$ ist.

3 Pkte 4) Radrennen

Dieses Frühjahr war Max Schlafmütze Schiedsrichter am Ziel beim Radrennen rund um die Neubürg. Gerade als das Rennen zu Ende ging, nickte Max Schlafmütze erschöpft ein. Er war ja auch für den Aufbau zuständig gewesen und heute schon um 3 Uhr früh aufgestanden. Als er wieder zu sich kommt, ist es schon zu spät. Er sieht die ersten Radfahrer Sophia, Marcel, Elias, Brigitte, Annelise und Tim schon im Zielraum erschöpft hinter der Ziellinie stehen. Wie konnte das nur passieren! Er musste jetzt unbedingt schnell und unauffällig herausfinden, in welcher Reihenfolge diese Radfahrer die Ziellinie passiert hatten.

Ganz cool befragt er einige umstehende Zuschauer, die ihm folgendes erwidern:

- Tim kam vor Brigitte ins Ziel.
- Annelise war nicht die letzte der Radfahrer.
- Genau vier weitere Radfahrer sind vor Marcel ins Ziel gekommen.
- Unter diesen vier Radfahrern hatte Elias den größten Vorsprung vor dem Radfahrer Marcel.
- Annelise kam nach Brigitte ins Ziel.

In welcher Reihenfolge sind die ersten Radfahrer ins Ziel gekommen oder reicht die vorhandene Information noch nicht aus?

5) Fee

Vor einigen hundert Jahren soll sich im geheimnisumwitterten Druidenhain bei Muggendorf in der Fränkischen Schweiz folgendes ereignet haben:

Eine Fee erscheint im Nebel bei Abenddämmerung einem Händler und erklärt ihm, dass er ein Geschenk erhalte. Er dürfe sich für eine der beiden Alternativen entscheiden:

a) Entweder erhält er 1 000 Gulden (viel Geld zur damaligen Zeit) oder

b) Er nennt eine natürliche Zahl n und erhält dann

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \text{ Gulden.}$$

Soweit überliefert ist, hat sich der Händler verwirrt für die sichere Alternative a) entschieden, hatte aber später große Zweifel, ob er sich richtig entschieden hatte.

Kürzlich ist seine Ururenkelin auf einen Rest einer Aufzeichnung ihres Vorfahrens gestoßen, der möglicherweise mit dem Geschenk der Fee zu tun hat:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99}\right) + \ldots \\ \leq \; & (1 + 1 + \ldots + 1 + 1) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}) + (\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}) + \ldots \\ \geq \; & 1 + (\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}) + (\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{1}{100} + \frac{1}{100}) + \ldots \end{aligned}$$

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Der Rest der Überlegungen ist leider von Mäusen aufgefressen...

4 Pkte

> *Frage I:*
> War die Entscheidung mit Alternative a) gut?
> Oder ist die Alternative b) mit einer *geeigneten* Zahl n besser?
> Falls die Alternative b) besser sein sollte, mit welcher Zahl n bekommt man mit b) sicher 2 000 Gulden?

Seine Ururenkelin, ihres Zeichens Mathe-Genie, auf Urlaub in der Fränkischen Schweiz, hat sich natürlich genau überlegt, was sie der Fee antworten würde, falls auch sie die Fee treffen würde. Und wie es der Zufall will, auch sie trifft die Fee, allerding im dunklen Wald bei Goldkronach am Rand des Fichtelgebirges.

Auch das Angebot ist ein wenig angepasst:

Die Fee erklärt der Ururenkelin, dass auch sie ein Geschenk erhalte. Sie dürfe sich für eine der beiden Alternativen entscheiden:

α) Sie erhält 1 <u>Kilogramm</u> Gold oder

β) Sie nennt eine natürliche Zahl n und erhält dann $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(n)$ <u>Gramm</u> Gold.

Für die neue Fee-Funktion gilt:

$$f(k) = \begin{cases} 1/k & \text{falls die Zahl } k \text{ keine Nullen} \\ & \text{in der üblichen Zifferndarstellung enthält,} \\ 0 & \text{falls die Zahl } k \text{ mindestens eine Null} \\ & \text{in der üblichen Zifferndarstellung enthält.} \end{cases}$$

Zum Beispiel gilt für die Fee-Funktion $f(15) = 1/15$, $f(243) = 1/243$, aber $f(20) = 0$, $f(100) = 0$, $f(101) = 0$ und $f(110) = 0$ usw.

4 Pkte

Frage II:
Welche Alternative ist besser?
Wenn man sich für β) entscheidet, wie muss man dann n wählen, dass man mindestens 2 Kilogramm Gold erhält?
Ist es möglich auch 100 Kilogramm Gold zu bekommen?

Viel Spaß beim Lösen der Aufgaben!